ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

ARTIGO

Estudo de Frações: superficialidades, parcialidades ou equívocos

Studying Fractions: superficialities, biases, and misunderstandings

Everaldo **Silveira**[*]

ORCID iD 0000-0002-2113-2227

Maria Alice Veiga Ferreira de **Souza**[**]

ORCID iD 0000-0003-2038-813X

Arthur Belford **Powell**[***]

ORCID iD 0000-0002-6086-3698

Resumo

Esse texto relata uma pesquisa que objetivou, a partir de estudo da literatura específica, identificar, apresentar e discutir superficialidades, parcialidades e equívocos de diferentes ordens e variadas origens, ligadas ao ensino e aprendizagem das frações. Para levantar os dados, utilizamos uma variação da metodologia *bola de neve*, que, a partir da leitura de um ou mais textos notáveis acerca do tema desejado, são elencados novos textos que podem conter informações relevantes. As superficialidades, parcialidades e equívocos identificados foram agrupados em sete categorias, cada qual abrigando uma ou mais dificuldades, fato que revelou que essas questões problemáticas encontram-se, de certo modo, entrelaçadas aos conceitos envolvidos no tema frações quando pensadas como conteúdo matemático escolar, e relacionam-se, desde os diferentes significados manifestados pelas frações no mundo real, passando por sua forma notacional de escrita, por sua existência enquanto número, pelas formas com as quais são representadas física e pictoricamente, pela complexidade da introdução de novas e numerosas regras quanto à sua aritmética, até as formas de condução preferidas por professores quando do ato de ensino. Ao observarmos quantidade significativa de questões problemáticas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de frações, concluímos que essa temática se constitui em uma frente importante para estudos teóricos e empíricos adicionais.

Palavras-chave: Fração. Ensino. Aprendizagem. Dificuldade. Números Racionais.

Abstract

This article reports on research based on literature in mathematics education to identify, present, and discuss superficialities, biases, and misunderstandings of different orders and various origins concerning the theme of

[*] Doutor em Educação Científica e Tecnológica (UFSC). Professor do Centro de Ciências da Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. E-mail: evederelst@gmail.com.

[**] Doutora em Psicologia da Educação Matemática (UNICAMP). Professora da Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (IFES), Vila Velha, Espírito Santo, Brasil. E-mail: alicevfs@gmail.com.

[***] Doutor em Educação Matemática pela Rutgers University (RU), New Brunswick, New Jersey, Estados Unidos da América (EUA). Professor Titulado de Educação Matemática e Pesquisador no Departamento de Educação Urbana no campus de Newark da Rutgers University (RU), Newark, New Jersey, EUA. E-mail: powellab@newark.rutgers.edu.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

teaching and learning fractions. We produced the research data using a variant of *snowballing.* After reading one or more relevant articles about our theme, we selected additional articles referenced in the consulted articles that potentially contain relevant information. We grouped the identified superficialities, biases, and misunderstandings into seven categories, each encompassing one or more difficulties. Consequently, we observed that these problematic issues are intertwined with the concepts involved in the subject of fractions when thought of as school mathematical content and are related from the different meanings manifested by fractions in the real world to its notational form, to its existence as a number, to how it is represented physically and pictorially, to the complexity of introducing new and numerous rules regarding its arithmetic, to the forms of conduct preferred by teachers when in the act of teaching. By observing many problematic issues related to the teaching and learning of fractions, we conclude that this theme is an essential front for further theoretical and empirical studies.

Keywords: Fractions. Teaching. Learning. Difficulties. Rational Numbers.

1 Introdução

O ensino de frações tem início nos Anos Iniciais do ensino básico regular de diferentes países, como Brasil, Estados Unidos e Japão, cujos conceitos de diferentes interpretações matemáticas são ampliados e estendidos ao longo dessa escolaridade, inclusive com aplicações em diferentes áreas da Ciência, tais como Engenharias, Economia, Administração, Química, Geografia e Estatística. Essa capilaridade e importância traz ao primeiro plano preocupações relatadas por diferentes autores da Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva a respeito da apropriação de suas compreensões por alunos (*e.g.*, Booth; Newton, 2012; Ni, 2001; Powell, 2023a; Siegler *et al*., 2012; Souza, 2021; Singh *et al*, 2020) e professores (*e.g.*, Ball, 1990; Ni, 2001; Newton, 2008; Lin *et al*., 2013; Powell *et al.*, 2022; Souza, 2021). As preocupações são reais quando constatamos que conceitos fracionários e suas operações aritméticas de frações estão diretamente associados com desdobramentos da Álgebra e da Matemática mais avançada, de modo geral (Siegler *et al.*, 2012; Van Hoof *et al*., 2018; Powell; Nelson, 2021).

Além disso, entendimentos equivocados sobre frações podem gerar lacunas ou dificuldades em estudos que dependam de suas apropriações, a exemplo do trato com problemas no mundo real (Behr *et al*., 1983), ou da influência negativa em questões ligadas à justiça e equidade sociais (Powell, 2018).

No contexto das lacunas, como veremos, existem indícios de que a compreensão de fração por parte de professores precisa ser melhorada. Do contrário, há alta probabilidade de que ideias equivocadas sejam reproduzidas em seus ensinamentos. Pela importância da matéria, importa conhecermos as principais superficialidades, parcialidades ou equívocos[1] relatados pela comunidade científica específica, a partir de uma revisão bibliográfica, sem limites temporais, mas concentrada na apresentação e discussão de preocupações acerca do ensino e da

[1] Os termos superficialidades, parcialidades e equívocos serão definidos na seção quatro deste texto.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

aprendizagem de frações que podem dar origem a problemas na Matemática mais avançada e em objetos de outras Ciências que dependam dessa compreensão. Eis nossa intenção nesta pesquisa.

2 Apoio teórico sobre frações

Sobre a natureza das frações, a literatura científica indica existência de duas perspectivas que Powell (2023b) as caracteriza e afirma em suas ontologias e implicações epistemológicas. Pensamos que interessa discorrer sobre o conhecimento fracionário fundamentado teoricamente nas denominações e categorizações de duas perspectivas de Powell (2019, 2023b): partição e medição.

2.1 Perspectiva de partição

Nessa perspectiva, o conteúdo de frações é concebido como possuindo diferentes interpretações[2], e assim sendo, deve ser compreendida com amplitude e profundidade, de modo integrado e articulado. Essas interpretações ganham variados *rótulos* a depender do autor, mas o que vale, de fato, é a essência de cada ideia sobre fração. Por isso, para unificar essas ideias – que emergem de uma ontologia de partição –, seguiremos as nomenclaturas de Kieren (1976) e Behr *et al*. (1983) para cinco interpretações que parecem ser adotadas pela maioria dos autores da Educação Matemática e que são resumidas no Quadro 1.

Interpretações	Compreensões	Exemplos
Parte-todo	Relação entre a quantidade de partes e o total de partes	1 de 5 partes iguais; 1 professora para cada 5 professores.
Quociente	Divisão de um número natural a por outro b, sendo $b \neq 0$.	1 dividido por 5.
Razão	Índice comparativo entre duas quantidades de mesma grandeza.	1 de alguma coisa comparada a 5 de outra coisa, em um senso multiplicativo.
Operador	Parte que atua sobre um todo e o modifica.	1/5 de uma quantidade que seja a unidade.
Medida	Iterações da fração unitária.	O comprimento de 1/5 em uma reta.

Quadro 1 - Diferentes interpretações para fração 1/5 na visão de Kieren e Behr
Fonte: parte da tabela adaptada de Souza (2021, p. 89) e Souza e Powell (2021, p. 85)

De modo geral, a interpretação *parte-todo* é concebida por educadores matemáticos

[2] Nesse texto as expressões *interpretações de frações* e *significados das frações* são usadas como sinônimas.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

como parte(s) de um todo, ou seja, parte(s) de um todo repartido em porções iguais. Em notação matemática, um todo m dividido em n partes do mesmo tamanho, das quais são tomadas m/n, sendo m e n números naturais com $n \neq 0$. Os modelos representacionais mais comuns utilizados por professores e autores de livros didáticos são áreas de figuras geométricas – retângulos, círculos (Dogan; Tertemiz, 2020) e coleções de objetos. A interpretação parte-todo se conecta às demais, especialmente porque serve como fonte de linguagem e simbolismo para todas as outras, segundo Kieren (1980), reforçando, assim, o paradigma da partição intrínseco em cada uma das cinco interpretações do Quadro 1.

A fração como *quociente* inclui a divisão de determinada quantidade m em n partes do mesmo tamanho. Os conjuntos também são muito usados nesses casos, mas, para Dogan e Tertemiz (2020), modelos de comprimento também são importantes para essa representação. Para Kieren (1980, p. 145, tradução nossa), essa interpretação "[...] está, por definição, relacionada à resolução de equações lineares e, portanto, representa um ponto de conexão com a álgebra das equações, bem como com a estrutura de campo [...]" .

A interpretação de fração como *razão* possui a ideia de proporção ou comparação. A razão agrupa frações m/n que, a depender do que se deseja representar, $m + n$ seria o todo ou n seria o todo. Por exemplo, podemos pensar em uma sala com quatro meninos e cinco meninas. Nesse caso, há quatro meninos para nove crianças, ou seja, $4/9$, ou há quatro meninos para cinco meninas, $4/5$. Ainda seria possível determinar a quantidade de meninas em relação às crianças, ou com referência aos meninos. Razão "[...] está ligada às muitas formas de construções proporcionais e, em particular, à probabilidade e à estatística descritiva e inferencial [...]" (Kieren, 1980, p. 145, tradução nossa).

Souza e Powell (2021) alertam que o significado razão guarda uma peculiaridade que deve ser considerada no ensino de frações: "[...] toda razão pode ser representada por um índice comparativo entre duas quantidades de mesma grandeza ou de grandezas diferentes [...]" (p. 83), mas nem toda razão é uma fração. Nas vozes de Souza e Powell (2021, p. 83):

> Quando a razão é representada por uma comparação entre quantidades de uma mesma grandeza (*e.g.*, a razão entre as idades de duas pessoas), também pode ser interpretada como fração, mas ao compararmos duas quantidades de grandezas diferentes (*e.g.*, a razão entre a distância e o tempo, ou seja, velocidade média), não descrevemos uma fração. Assim sendo, concluímos que nem toda razão é uma fração, mas existem frações que são razões.

Se uma fração m/n é utilizada para multiplicar outra quantidade, ou seja, usada para separar determinada parte de uma quantidade, ela é chamada de fração como *operador*. Os modelos mais comuns para ensinar esse tipo de fração, embora não exclusivos, são os conjuntos. Souza e Powell (2021, p. 84) explicam que a "noção de operador implica uma fração

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

sendo multiplicada por um número inteiro – *e.g.*, $1/4$ dos alunos foram aprovados; $2/5$ dos brinquedos foram reformados”, e que essa interpretação “[...] gera transformações de magnitudes, ou seja, obtém outra quantidade com a mesma unidade. Em outro sentido, segue a noção de fração como medida [...]” (p. 84). O operador, de acordo com Kieren (1980), pode ser conectado às estruturas de transformação e à construção de função mais geral.

Quando uma fração m/n é vista como m medidas da fração unitária $1/n$, então estamos lidando com a interpretação de medida. As retas numéricas e outros modelos de comprimento são, geralmente, preferidos no ensino de frações como medida (Namkung; Fuchs, 2019). Behr *et al*. (1983) registram ser forte a ideia de comprimento no sentido de *quanto* e não exatamente *de quantas partes* na interpretação de fração como medida. Essa visão contribui para a formação da ideia de número fracionário, ou seja, a fração como número (quantidade única), e não como dois números naturais isolados, separados por um traço. Por exemplo, a fração $1/5$ pode ser uma unidade de comprimento para medir $4/5$. Serão, portanto, necessárias quatro unidades de $1/5$ para medir $4/5$ (iteração de fração unitária). Nesse caso, define-se primeiramente a unidade, que é a unitização da fração, para, depois, serem iteradas as quantidades de partes iguais.

2.2 Perspectiva de medição

Historicamente, a perspectiva da medição emergiu antes da partição e derivou de práticas socioculturais africanas antigas para medir e registar as medidas de quantidades tais como terra, colheitas e sementes (Roque, 2012). Para medir distâncias de terra, os antigos agrimensores esticavam cordas contendo nós, e o comprimento entre os nós representava uma unidade de medida. Quando a distância terrestre não era um múltiplo exato da unidade, surgiu a necessidade de comprimentos fracionários. Assim, as frações eram uma relação representando uma comparação multiplicativa entre duas quantidades: (a) uma dimensão de terra, uma distância d; e (b) a distância uniforme entre nós consecutivos, a unidade de medida u. O resultado da comparação é a quantidade d/u, usando o símbolo bipartido que ainda está em vigor hoje em dia (Powell, 2023a).

A noção de *medição* não só se diferencia ontologicamente da *partição*, mas também epistemologicamente. Como Powell (2023a) explicou, usando barras de Cuisenaire e seu atributo de comprimento, a comparação multiplicativa entre o comprimento das barras, verde (v) e laranja (l), é uma das duas relações v/l ou l/v, dependendo qual das barras, l ou v, seja considerada a unidade de medida. Além disso, para fazer a mesma comparação, pode-se usar

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

uma subunidade. Em conformidade, se a barra laranja for a unidade de medida e a vermelha a subunidade, então, como o comprimento de três barras vermelhas iguala a barra verde, e cinco vermelhas a barra laranja, o comprimento da barra verde em comparação à laranja é de três quintos ou, simbolicamente, $v = \frac{3}{5} \times l$. No entanto, mantendo a barra vermelha como a subunidade, se a barra verde for a unidade de medida, o comprimento da barra laranja relativa ao comprimento da verde é de cinco terços, simbolicamente seria $l = \frac{5}{3} \times v$ (Figura 1).

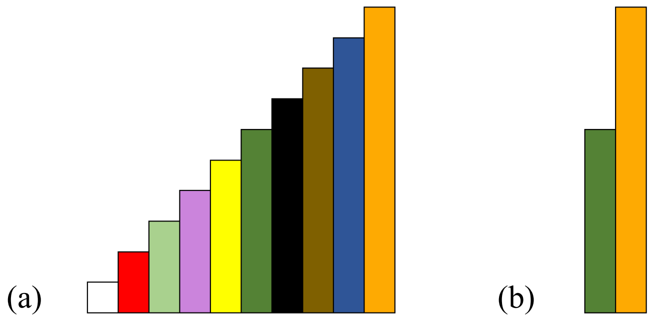

Figura 1- (a) Um conjunto das barras de Cuisenaire arranjado em uma *escada* de 1 a 10 centímetros de comprimento. (b) Comparando multiplicativamente os comprimentos de duas barras de Cuisenaire, verde e laranja
Fonte: autores (2023)

Com a perspectiva de medição, vários desafios apresentados pela outra são epistemologicamente superados. Esses desafios serão detalhados na seção seguinte. Entretanto, desde já, vale sublinhar algo que é implícito nos exemplos apresentados no parágrafo anterior. Nomeadamente, os números mistos e as frações impróprias surgem naturalmente por meio de comparação de uma quantidade com a unidade de medida. Ainda mais, por meio dessa perspectiva, a epistemologia para o conhecimento fracionário leva cognitivamente à proporcionalidade e álgebra (Powell, 2023a).

3 Método, procedimentos e amostra de literatura relevante sobre frações

A escolha dos textos a serem estudados se deu de forma não probabilística, com apoio em cadeias de referências, utilizando uma técnica emprestada da metodologia *Bola de Neve* (Vinuto, 2014; Wohlin, 2014). Em outras palavras, cada trabalho estudado pode levar a outros como um encadeamento sucessivo por meio das referências que cada um sinaliza. Nessa esteira, os procedimentos metodológicos se deram na seguinte ordem: a partir da leitura de três textos iniciais (Powell, 2023b; Toledo, 2020; Tian; Siegler, 2017), escolhidos por apresentarem vasto

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

diálogo com a literatura pertinente[3], outros trabalhos relevantes para o estudo foram sendo identificados, no que Wohlin (2014) chama de "primeira iteração" (p. 03). Segundo Wohlin (2014), a identificação de textos relevantes acontece em uma especial atenção às citações realizadas no corpo do texto, bem como em uma varredura nos títulos dos textos apresentados nas suas referências bibliográficas. O *corpus* dessa pesquisa envolve artigos publicados em periódicos ou eventos, dissertações, teses e livros.

Seguindo as orientações de Wohlin (2014), sempre que identificamos o potencial de um texto alinhado aos propósitos de nossa pesquisa, avançamos para a leitura de seu resumo, quando possuíam, e, em seguida, realizamos leituras de partes que julgamos mais relevantes. Só após estarmos convencidos de que o texto poderia trazer informações relevantes para o nosso estudo, ele foi incluído no *corpus*. Foram promovidas outras iterações idênticas à primeira e, a cada novo texto, encontrávamos outros igualmente relevantes.

A partir de alguns textos elencados na leitura de Toledo (2020), identificamos a publicação de um número especial da revista Bolema (Boletim de Educação Matemática), do ano de 2008, sobre o tema "ensino e a aprendizagem de frações". Fizemos uma varredura nessa edição especial e dela elencamos alguns textos que passaram a compor o *corpus*.

Esse processo de alongamento das cadeias de referência pode (e deve) acontecer quantas vezes o pesquisador julgar necessário. Em seguida, todas as informações inventariadas foram categorizadas à *posteriori*. Após reiteradas iterações, os textos não apresentavam mais novidades ou elementos que pudessem contribuir com os objetivos da investigação, ou seja, "[...] o quadro de amostragem tornou-se saturado [...]" (Vinuto, 2014, p. 203). Os novos textos, portanto, não traziam novas informações acerca da temática pesquisada, repetindo aquilo que já havia sido identificado em outros textos e incorporado ao *corpus*. Essa ocorrência nos indicou a saturação preconizada por Vinuto (2014) e, portanto, o fim das buscas e inserções no *corpus*.

Em se tratando dessa metodologia, é importante que o pesquisador identifique, entre os textos lidos, aqueles que apresentem resultados de pesquisas empíricas, que serão utilizados para suportar as categorias de análise. Finalmente, a etapa metodológica é concluída com a discussão dos dados produzidos.

Argumentamos que, embora a amostragem não seja necessariamente reproduzível, ela é representativa da população de literatura pertinente ao tema anunciado, em função da condição de saturação, levando-nos a apresentar e discutir o ensino e a aprendizagem de frações que podem alertar e sugerir caminhos para o trabalho em formações de, com e para professores,

[3] Dois dos autores deste artigo são pesquisadores do tema ensino e apredizagem de frações há muitos anos, com muitos de artigos publicados sobre essa temática. Isso facilitou a escolha dos textos iniciais.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

revelados por 50 trabalhos elencados no Quadro 2, anexado a este artigo. A apresentação e discussão desses trabalhos foram agrupadas em subseções em torno de preocupações sobre ensino e aprendizagem de frações, que inauguram a próxima seção.

4 Preocupações acerca do estudo de frações

As preocupações ligadas às dificuldades com ensino e aprendizagem acerca das frações parecem ser de diferentes ordens e de variadas origens. Propomos apresentá-las e discuti-las em sete categorias de preocupações, cada qual abrigando uma ou mais dificuldades. Relatadas pela comunidade de educadores matemáticos e psicólogos cognitivistas em pesquisas científicas, essas dificuldades têm enfoque no que pode se constituir como superficialidades, parcialidades ou equívocos. Entendemos esses três termos de maneira específica.

Primeiro, a superficialidade seria uma condição ou qualidade de quem promove uma observação ou afirmação que é básica, elementar, pouco profunda e sem reflexão. Por exemplo, a utilização algorítmica do M.M.C. desligada de significados para a identificação de frações equivalentes. Segundo, a parcialidade é uma qualidade de quem toma partido de alguma coisa, por alguma razão. A exemplificar, podemos citar uma opção do professor, por vezes ingênua, pelo uso limitado de alguma interpretação de fração. E finalmente, o equívoco seria um engano por interpretação incompleta ou incorreta de alguma noção ou conceito. Um exemplo pode ser observado quando um aluno, na prática da adição de frações, soma numeradores e denominadores, indiscriminadamente.

Além de discursar esses três enfoques das dificuldades, discutimos opiniões sobre causas instrucionais, entendidas nesse texto como ocorrências que emergem do ensino de frações ou do livro didático.

4.1 Quanto aos significados das frações

Para Kieren (1980), o significado *parte-todo* teria importância central, como uma espécie de base para a compreensão das frações, mas o próprio autor afirma que essa noção hierárquica não é muito importante. Para ele, todas as interpretações são importantes. Juntas, elas auxiliam em uma compreensão ampla das frações, o que cada uma individualmente não é capaz de fazer. Além da compreensão ampla sobre as frações, o domínio de todas essas interpretações também contribui para a aquisição de proficiência nas operações com frações e é considerada um pré-requisito na resolução de problemas no domínio das frações (Charalambous; Pitta-Pantazi, 2005).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

A literatura, porém, enfatiza que uma das grandes problemáticas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de frações reside justamente na pouca clareza e compreensão das cinco interpretações, segundo o paradigma parte-todo (Charalambous; Pitta-Pantazi, 2005; Gabriel *et al*., 2013; Dogan; Tertemiz, 2020), e praticamente total desconhecimento do paradigma da medição (Powell, 2023a). Ademais, pelo caráter ontológico e abrangente, é possível que o paradigma da medição possa suprir a carência de compreensão do paradigma parte-todo apontada pela literatura. Assim, inferimos que a noção de fração possui uma complexidade extra: é muito ampla e apresenta grandes diferenças entre suas formas de se manifestar. Apenas pensando em exemplificar, uma dessas complexidades se manifesta na frase *toda fração pode ser entendida como razão, mas nem toda razão pode ser interpretada como fração*. Vejamos: a relação 3 *meninos para* 5 *meninas*, pode ser representada como $3/5$ (três para cinco), mas não faz sentido como fração (três quintos).

4.2 Quanto à notação das frações

A notação de fração pode ser problemática para alunos, afinal, sua representação é escrita com um par de números naturais separados por um traço (Lopes, 2008; Lortie-Forgues; Tian; Siegler, 2015; Namkung; Fuchs, 2019). Bertoni (2008), em concordância, afirma que a utilização de dois símbolos (numéricos) para a escrita de uma fração é um dificultador para seu entendimento. Nesse sentido, Namkung e Fuchs (2019) dizem que, muitas vezes, alunos veem dois números inteiros isolados ao olharem para o numerador e o denominador. Reiteramos que, talvez, o problema esteja no fato de serem dois símbolos ou algarismos já usados anteriormente para outra finalidade, ou seja, como números inteiros, para quantificar coleções de objetos discretos.

Um complicador nesse caso é que, para além dos números racionais possuírem outras duas formas de representação, ou seja, a notação decimal e a percentual, as próprias frações, no caso das impróprias, podem ser representadas por uma simbologia que mistura uma parte inteira com outra fracionária, o que ocorre com os números mistos, apresentando uma notação diferente. Segundo Kusaka (2021), a conversão entre as notações de frações impróprias e números mistos não é trivial.

4.3 Quanto à densidade numérica

Alunos no início do percurso dos Anos Iniciais do ensino básico regular, ao estudarem o conjunto dos números naturais, certamente aprenderam que todo número natural possui um antecessor, que é o número imediatamente anterior a ele, e um sucessor, aquele número que o sucede, com exceção do zero, que possui apenas sucessor. Essa propriedade é verdadeira por se

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

tratar de um conjunto numérico discreto.

A partir do quarto ano do ensino básico, os alunos passam a ter contato com o conjunto dos números racionais. Dessa forma, buscando iniciar o entendimento sobre esse novo tipo numérico, os alunos são levados a tentar aplicar regras já aprendidas, relativas ao conjunto dos números naturais, nesse novo conjunto numérico. Uma primeira diferença que ocorre entre esses conjuntos é que, enquanto os naturais se constituem como um conjunto discreto, os racionais são densamente ordenados (Gabriel *et al*., 2013). Em outras palavras, podemos dizer que entre dois números racionais há infinitos outros números racionais, sendo impossível identificar, para o número racional dado, um antecessor ou um sucessor (Torbeyns *et al*., 2015; Lortie-Forgues; Tian; Siegler, 2015; Namkung; Fuchs, 2019).

Essa compreensão, que parece ser problemática para os alunos, também o é para professores. Tirosh *et al*. (1998), apresentam resultados de uma pesquisa sobre professores israelenses em formação inicial, e relatam que 40% dos pesquisados não sabiam sobre a infinidade de números entre 0,23 e 0,24, e somente 24% disseram haver infinitos números entre $1/5$ e $1/4$. Essa mesma discussão é realizada por Toledo (2020) em uma pesquisa com licenciados em Matemática. Diante de questões semelhantes às relatadas por Tirosh *et al*. (1998), Toledo (2020) conclui que, embora os participantes da pesquisa concordassem que existem outros números entre os dois citados, não desenvolveram a compreensão de que esses números são infinitos.

4.4 Quanto à relação numeral ou número

Outra questão problemática remete à noção de cardinalidade. No âmbito do conjunto dos números naturais, ao se contar determinada coleção ou medir algo cuja magnitude do objeto medido seja múltipla da unidade de medida, sempre há um, e apenas um, símbolo numérico para representar a quantidade ou medida obtida. Para exemplificar, podemos pensar em contar uma coleção de sete bonecos, registrando ao final o numeral 7, ou na medição de uma ripa de madeira com exatamente três metros, registramos 3m ao final. Nesses casos, os símbolos matemáticos são exclusivamente 7 e 3. No conjunto dos números racionais, uma magnitude ou quantidade – escrita como frações ou decimais – pode ser registrada de muitas maneiras (*e.g.*, $3/2$ pode ser escrito como $1\ 1/2;\ 6/4;\ 9/6;\ 1{,}5;\ 1{,}50$ etc.).

Essa diversidade está relacionada, para além das diferentes notações possíveis para um número racional, à noção de frações equivalentes. Gabriel *et al.* (2013) afirmam que a compreensão das frações equivalentes é uma tarefa difícil para os alunos. Eles mostram em sua

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

pesquisa que, mesmo alunos que conseguiam simplificar frações, tiveram pouco sucesso em uma tarefa para localizar $2/3$ na reta numérica cujas referências eram 0 e $1/6$. Para esses pesquisadores, embora os alunos dominassem procedimentos para simplificação de frações, eles não conseguiam relacionar essa ação ao conceito subjacente de frações equivalentes.

Outra limitação está relacionada à comparação entre duas frações (Gabriel *et al*., 2013). Uma atividade que requeira decidir sobre a maior fração entre $1/3$ ou $1/5$, por exemplo, muitos alunos entenderam que $1/5$ era maior que $1/3$, porque 5 era maior que 3. Ao resolverem dessa forma, eles mostraram equívocos na compreensão conceitual de fração. Ao entenderem conceitualmente frações, os alunos compreendem que, para frações com numeradores iguais, denominadores maiores denotam quantidades menores.

4.5 Quanto às frações impróprias

As frações impróprias se constituem na grande dificuldade para alunos que sejam singularmente introduzidos no estudo de frações pela perspectiva parte-todo (Baturo; Cooper, 1999; Magina; Campos, 2008; Silva; Almouloud, 2008; Gabriel *et al*., 2013). A propósito, vale destacar que esse constructo é privilegiado em muitos livros didáticos (Scheffer; Powell, 2019; Dogan; Tertemiz, 2020). Wu (2009) não fez cerimônia em definir esse significado como um conceito ingênuo de fração pelas fragilidades que apresenta sem que haja algum tratamento anterior que apoie a construção do conceito. O problema parece residir no fato de que os alunos não conseguem compreender, por exemplo, como pode haver uma fração 5/3 se o todo foi dividido em três partes.

Tzur (1999) mostrou haver um obstáculo instransponível entre a compreensão das frações próprias e aparentes para a compreensão das frações impróprias, em um estudo investigativo. Em uma atividade em que os alunos usavam frações unitárias para compor frações não unitárias, por exemplo, $1/5$ para compor $3/5$, eles iteravam três vezes a fração $1/5$ para chegar ao resultado. Os alunos também reconheciam que se iterassem a fração unitária $1/5$ cinco vezes, chegariam a $5/5$, mas quando foram convidados a iterar a fração unitária $1/5$ por seis vezes, chegando à fração $6/5$, eles concluíram que, agora, o todo era de $6/6$ e que a fração unitária era $1/6$. Os alunos alteraram o tamanho da unidade de medida como meio para explicar o que foram solicitados. A mera compreensão do que seja uma fração imprópria teria sanado esse equívoco (Tzur, 1999).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

4.6 Quanto à representação de frações

4.6.1 Modelos de área

As frações têm sido representadas, geralmente, por modelos de área (Dogan; Tertemiz, 2020), principalmente com figuras retangulares (Bertoni, 2008) e circulares (Singh *et al*., 2020; Silva; Almouloud, 2008). Essas representações são excessivamente usadas em livros didáticos (Kusaka, 2021) e, assim como a interpretação parte-todo é privilegiada no ensino e aprendizagem de frações, os modelos de áreas também o são. Para Xiaofen, Clements e Ellerton (2015), a exaustiva utilização de modelos de área no ensino pode prejudicar o desenvolvimento conceitual de frações. Voltamos aqui ao caso das frações impróprias. O uso de modelos de área é limitante quanto à compreensão desse tipo de fração. Imaginemos, a exemplificar, como representar, usando círculos, a fração $5/3$ (Figura 2).

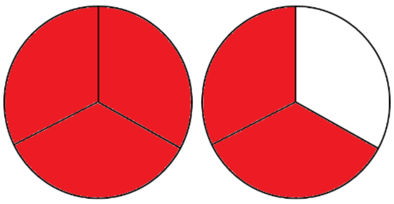

Figura 2 - Surgimento *mágico* de um novo modelo circular para representar 5/3
Fonte: autores (2023)

Para além da questão anterior, Silva e Almouloud (2008) chamam atenção para problemas relacionados à não divisão da área em partes congruentes (Figura 3). Uma figura pode ser dividida em diversas partes não congruentes, e uma ou algumas delas serem hachuradas. A simples contagem das partes hachuradas, e de todas as partes, levará ao erro. Dessa forma, o uso desse tipo de modelo também exige cuidado ao ser apresentado ou solicitado aos alunos.

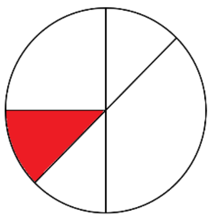

Figura 3 - Modelo circular dividido em partes não congruentes
Fonte: autores (2023)

É importante salientar ainda que há grandes possibilidades de, ao desenhar modelos circulares para representar frações cujos denominadores são ímpares ou demasiadamente grandes, os alunos tenderem a apresentar dificuldades na divisão do todo. Para Lee e Lee (2019), o

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

particionamento de círculos em uma grande quantidade de partes congruentes não é uma tarefa corriqueira. Scheffer e Powell (2019), ao discutirem representações de frações em livros didáticos brasileiros, mostram que são utilizados muitos modelos com alimentos. Embora esses modelos sejam tortas, bolos ou pizzas, acabam recaindo em modelos de área, pois esses alimentos são representados por figuras 2D redutíveis a retângulos ou círculos. Para esses autores, a ideia de usar alimentos não é adequada, uma vez que é improvável que um bolo ou uma pizza possam ser divididos, com cortes, em partes congruentes, pois, no mundo real, para dividir alimentos em partes congruentes seria necessário pensar em termos de massa e não de área.

Por fim, Wu (2009) argumenta que modelos circulares, como pizzas ou tortas, para representar frações podem ser úteis inicialmente, mas, além de ruins para representar frações impróprias, acabam por criar situações estranhas como a ideia absurda de multiplicar dois pedaços de torta, por exemplo.

4.6.2 Modelo da reta numérica

A reta numérica é outro modo utilizado para a representação de números racionais. Ele é especialmente utilizado quando as frações são trabalhadas com o significado de medida. Wu (2009) defende a utilização das retas numéricas por entender que elas eliminam as limitações conceituais entre $2/3$ ou $5/3$, tornando essas frações ou números fracionários como pontos de uma reta. Assim sendo, estaria também eliminada a limitação conceitual entre frações próprias ou impróprias. Ainda em defesa desse modelo representacional, Booth e Newton (2012) argumentam que as representações de frações em uma reta auxiliam na compreensão de suas magnitudes ou tamanhos relativos, e a compreensão das magnitudes pode ser um passo em direção a uma compreensão mais ampla e profunda sobre o número fracionário. Além disso, a reta numérica é um espaço unificador para todo o conjunto dos números racionais, afinal, como esses números possuem magnitudes, eles podem ser localizados e ordenados nesse instrumento (Siegler; Lortie-Forgues, 2015).

Por outro lado, a literatura apresenta algumas dificuldades quanto ao uso da reta numérica para a representação de números fracionários (Charalambous; Pitta-Pantazi, 2005; Baturo; Cooper, 1999). Gabriel *et al*. (2013) relatam que alunos habituados ao trabalho com retas numéricas também apresentaram dificuldades para posicionar corretamente uma fração na reta graduada. Por exemplo, em uma tarefa os alunos precisavam posicionar o número um em uma reta com frações impróprias ordenadas. O erro mais comum, segundo os pesquisadores, foi o posicionamento do número um no final da sequência, indicando que eles não conseguiam imaginar uma fração maior que um. Kallai e Tzelgov (2009), asseveraram que os adultos possuem uma representação mental de “fração

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

generalizada” (p. 1845) que corresponde a uma “entidade menor que um” (p. 1845). Essa representação mental parece assolar muitos alunos em idade escolar também.

Carraher (1993), citando um estudo em conjunto com outros pesquisadores, apresentou a dificuldade de alunos do oitavo e décimo ano do ensino básico regular em entender como uma fração poderia ser representada em uma reta numérica. Segundo o pesquisador, os estudantes obtinham algum êxito em apontar frações em segmentos de retas que iam de 0 a 1, mas manifestavam dificuldades para trabalhar com intervalos maiores (*e.g.*, 0 a 3, etc.). Nesse mesmo sentido, Widodo e Ikhwanudin (2018) mostraram que alunos tiveram embaraços em entender a unidade em um segmento de reta dividido em oito segmentos congruentes, com os pontos das extremidades anotados como 0 e 2. Os alunos inseriram a fração $7/8$ nas proximidades do ponto 2. Para eles, esse resultado indicou que os alunos não compreenderam as unidades do segmento, tomando aleatoriamente a totalidade do segmento como a unidade. Outros estudos chegaram às mesmas conclusões (*e.g.*, Ni, 2001).

4.7 Quanto à aritmética das frações[4]

Para Lortie-Forgues, Tian e Siegler (2015), a compreensão da aritmética das frações requer domínio do conceito de frações. Assim, se houve superficialidade, parcialidade ou equívocos no ensino ou na aprendizagem desse conteúdo, provavelmente as operações com frações serão um problema, por abrigarem um emaranhado de ideias que se relacionam ou se sobrepõem quando tratamos de números racionais, conforme dizem Onuchic e Allevato (2008). Esse emaranhado aumenta à medida que novos elementos relacionados ao tema dos racionais – mais especificamente dos números fracionários – vão sendo introduzidos. Para Gabriel *et al.* (2013, p. 1), a utilização de frações “[...] envolve a articulação de conhecimento conceitual com manipulação complexa de procedimentos [...]”.

Lortie-Forgues, Tian e Siegler (2015) declararam que, mais do que em qualquer outro tema matemático componente dos programas do ensino básico inicial, a aritmética de frações requer a mobilização de grande listagem de procedimentos distintos, tais como: habilidades para operar as quatro operações com números inteiros (não negativos, inicialmente); trabalhar com frações equivalentes; simplificar frações quando possível; converter notações de frações impróprias para números mistos; compreender a manutenção de denominadores, ao inverter

[4] Neste texto, referimo-nos às frações ou números racionais positivos, devido às discussões aqui presentes se relacionarem à introdução da noção de fração e suas operações, o que costuma ocorrer antes que os alunos sejam levados ao estudo dos números negativos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

uma das frações; manter os denominadores ou não na resposta; quando operar apenas com os numeradores ou quando operar com numeradores e denominadores.

Além disso, Lortie-Forgues, Tian e Siegler (2015) lembram que, como os procedimentos de cálculos com números inteiros são fundamentais, ao se operar com frações, qualquer imprecisão nesses procedimentos causará erro na operação. Para eles, esse tipo de equívoco causa uma porcentagem significativa de erros na aritmética de frações entre os estudantes estadunidenses (Lortie-Forgues; Tian; Siegler, 2015). Por outro lado, em meio a tantos procedimentos emaranhados, ainda é preciso dizer que, embora as regras da aritmética dos números inteiros sejam fundamentais para operar com frações, elas não são suficientes. Há regras exclusivas nesse ínterim. Desenvolvemos essa discussão nos próximos tópicos.

4.7.1 Dificuldades em adicionar ou subtrair frações

Um dos primeiros problemas quando o assunto é adição de frações é a ação ingênua de somar numeradores e denominadores, traídos por regras herdadas da aritmética dos números inteiros, (Gabriel, *et al.*, 2013). A soma $1/3 + 1/2$ resulta em $2/5$ para muitos alunos. Tian e Siegler (2017) entendem que esse tipo de erro ocorre porque muitos estudantes veem uma fração como dois números inteiros e, dessa forma, aplicam a adição na parte de cima e na parte de baixo, indiscriminadamente. Se os alunos usam essa mesma estratégia para adicionar frações com denominadores iguais (*e.g.*, $1/5 + 2/5 = 3/10$), é possível inferir que eles não entendem o papel do denominador em uma fração.

Na adição e subtração de frações com denominadores diferentes, estamos diante de operações desafiadoras e difíceis para a maioria dos alunos. Para resolver uma operação de adição de frações com denominadores diferentes, o aluno precisa compreender a natureza do número fracionário. O conceito de frações equivalentes é essencial nesse momento, mas, como vimos, estudantes têm dificuldades para entender essas diferentes formas de escrita para um mesmo número (Gabriel *et al.*, 2013).

Mais adiante, no início dos Anos Finais do ensino básico regular, são apresentados métodos *mágicos* aos alunos, como a identificação do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), para resolver o problema dos denominadores diferentes. Se o ensino for pautado unicamente em procedimentos, o MMC se constituirá em mais uma regra destituída de significado, como tantas outras na aprendizagem da Matemática.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

4.7.2 Dificuldades em multiplicar e dividir frações

Duas ideias relacionadas à aritmética de números inteiros se constituem como fontes das primeiras dificuldades em relação a essas duas operações. Na multiplicação de números inteiros (positivos) o produto de dois fatores, quando ambos forem diferentes de 1, sempre resultará em um produto maior que os fatores (*e.g.*, $2 \times 3 = 6;\ 6 > 2\ e\ 6 > 3$). Se um dos fatores for "1", o produto será maior que 1 e igual ao outro fator (*e.g.*, $1 \times 3 = 3;\ 3 > 1\ e\ 3 = 3$). Se ambos os fatores forem 1, então o produto será igual a eles, ou seja, 1 (*e.g.*, $1 \times 1 = 1;\ 1 = 1$). Daqui podemos supor que, na multiplicação de dois números inteiros (positivos), nunca ocorrerá um produto menor que qualquer um dos dois fatores.

No caso da divisão de números inteiros (não negativos), sabemos que é impossível obter como quociente um número maior que o dividendo (*e.g.*, $6 \div 2 = 3;\ 3 < 6$). No máximo, se o divisor for 1, o quociente será igual ao dividendo (*e.g.*, $6 \div 1 = 6;\ 6 = 6$). Essas verdades matemáticas levam a duas ideias gerais que vão se consolidando no aprendizado dos alunos à medida que a aritmética de números inteiros (positivos) vai sendo desenvolvida pelos professores: (a) multiplicações sempre gerarão produtos maiores ou iguais aos fatores e; (b) divisões sempre gerarão quocientes menores ou iguais aos dividendos. O problema é que essas *verdades* não se aplicam à totalidade dos números racionais[5]. Quando a multiplicação ocorre entre números no intervalo 0 e 1 (ou seja, entre duas frações próprias), o produto será sempre menor que qualquer um dos fatores (*e.g.*, $1/2 \times 1/3 = 1/6;\ 1/2 > 1/6\ e\ 1/3 > 1/6$). Mesmo quando um dos fatores for maior que 1, o produto será menor que ele (*e.g.*, $1/2 \times 3 = 3/2;\ 3/2 < 3$). No caso das divisões, quando o divisor assume um valor situado entre 0 e 1, mesmo que o dividendo seja um número maior que 1, o quociente será sempre maior que o dividendo (*e.g.*, $3/2 \div 1/2 = 6/2 = 3;\ 3 > 3/2$). Exatamente o contrário do que ocorria no conjunto dos números inteiros positivos.

Voltando ao emaranhado de procedimentos com frações, no qual muitas vezes uma regra vale para uma operação, mas não para outra (como a necessidade ou não de denominadores iguais nas quatro operações com frações), Siegler e Lortie-Forgues (2015, p. 3) informam que essas duas situações, conforme expostas nos parágrafos anteriores, podem estar relacionadas ao que chamam de "[...] erros de direção de efeitos [...]". Para eles, somar e subtrair – com números inteiros (positivos) ou com frações (também positivas) – sempre gera o mesmo efeito, ou seja, o resultado será sempre maior que ambas as parcelas no caso da soma, e a diferença sempre será menor que o

[5] Aplicam-se apenas à parte do conjunto dos números racionais chamada de números inteiros positivos.

minuendo, no caso da subtração.

Na multiplicação e na divisão, conforme vimos, há mudança nos algoritmos e efeitos das operações. Multiplicações, que no âmbito dos números inteiros positivos produzem resultados maiores que, pelo menos, um dos fatores envolvidos, no âmbito dos números fracionários próprios, produzem resultados menores que os fatores. Nas divisões com números inteiros, enquanto os quocientes são sempre menores que o dividendo, quando o divisor é uma fração própria, esses quocientes passam a ser maiores que os dividendos (Siegler; Lortie-Forgues, 2015; Namkung; Fuchs, 2019; Tian; Siegler, 2017). Outra diferença é a possibilidade de, diante de uma multiplicação de frações do tipo $2/4 \times 3/4$, os alunos multiplicarem apenas os numeradores, mantendo o denominador comum, obtendo $6/4$ (Siegler; Pike, 2013).

A multiplicação tem sido introduzida como uma soma de parcelas iguais. Dessa forma, 3×5 representa a soma $5 + 5 + 5$. Para Lortie-Forgues, Tian e Siegler (2015), embora seja benéfico que os alunos utilizem conhecimentos já desenvolvidos, para aprender uma nova operação, essa forma de introduzir a multiplicação de números inteiros pode causar, pelo menos, dois problemas ao trabalharem com multiplicação de frações: (a) ao transformarem uma multiplicação em uma soma, estão garantindo que a multiplicação sempre resultará em um produto maior que, pelo menos, um dos fatores, pois ao se somar (no âmbito dos números positivos) sempre obteremos um resultado maior que cada uma das parcelas. No caso dos números fracionários próprios, essa regra já não é mais verdadeira e; (b) a impossibilidade de ver $1/3 \times 2/5$ como uma soma de parcelas repetidas (Lortie-Forgues; Tian; Siegler, 2015; Behr *et al*., 1983).

4.8 Existem culpados?

Muitos pesquisadores afirmam que um dos grandes vilões na aprendizagem da aritmética fracionária é o excesso de atenção dedicado aos procedimentos mecânicos com papel e lápis (Gabriel *et al*., 2013; Singh *et al*., 2020), em detrimento da exploração intuitiva do aprendiz sobre a riqueza de relações lógico-matemáticas envolvidas no conteúdo das frações (Singh *et al*., 2020). Lamon (2001) afirma que o currículo de frações se resume na apresentação de procedimentos algorítmicos com fins computacionais que até ajudam como pré-requisito quanto à lide com expressões algébricas, mas não leva os alunos a entenderem que os racionais, são por si sós, números.

Para Kusaka (2021), sem compreender o significado dos cálculos, alunos são obrigados a confiar na memorização dos procedimentos. Como consequência, eles veem os cálculos como *pedras de tropeço*, fazendo-os perderem o gosto pela Matemática. Há mais de quarenta anos, Hilton

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

(1983), ao criticar o excesso de ênfase na mera habilidade técnica em detrimento da exploração do conteúdo matemático das frações, afirmou que o fazemos por medo, desgosto ou talvez por princípios equivocados. Por outro lado, alunos que conseguem decorar ou memorizar o conjunto de procedimentos para lidar com as frações podem passar a falsa impressão de que compreendem a temática (Bertoni, 2008).

Essas abordagens acerca da temática das frações em salas de aula estão relacionadas à prática docente. Pesquisadores reiteram que professores em formação inicial, e já em atividade docente, possuem, geralmente, lacunas em seu conhecimento sobre frações (Namkung; Fuchs, 2019): ou têm um conhecimento limitado (Siegler; Pyke, 2013; Tirosh, 2000), ou acham o ensino de frações difícil (Yusof; Lusin, 2013).

5 Conclusões

Nessa pesquisa intencionamos conhecer as principais superficialidades, parcialidades ou equívocos relatados pela comunidade científica específica, a partir de uma revisão bibliográfica acerca do ensino e da aprendizagem de frações que podem dar origem a problemas na Matemática mais avançada e em objetos de outras Ciências que dependam dessa compreensão. Essas superficialidades, parcialidades e equívocos quanto ao ensino e à aprendizagem de frações foram agrupadas e apresentadas segundo algumas categorias, cujo teor é preocupante para a comunidade de educadores matemáticos.

Essas questões problemáticas encontram-se amalgamadas aos conceitos envolvidos no tema frações quando pensadas como conteúdo matemático escolar, e relacionam-se, desde as diferentes formas de manifestação de uma fração no mundo real, passando pela sua forma notacional de escrita, por sua existência enquanto número, pelas formas com as quais é representada física e pictoricamente, pela complexidade da introdução de novas e numerosas regras quanto à sua aritmética, até as formas de condução primadas por professores quando do ato de ensino. Elas têm sido objeto de estudo, conforme mostrado no texto, de muitos pesquisadores, que, por suas vezes, apresentam propostas para melhorar a aprendizagem das frações, mas que não se configuram como soluções definitivas. Reiteramos, ainda, que não foi nosso objetivo, por motivos de limitação espacial nesse artigo, discutir as propostas de solução para as questões problemáticas apresentadas, mas contribuir no sentido de agrupar essas questões em um quadro mais geral.

Ao observarmos quantidade significativa de questões problemáticas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de frações, concluímos que essa temática se constitui em uma frente importante

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

e necessária para estudos futuros. A perspectiva de medição nos parece inovadora e promissora ao se apresentar como um novo paradigma para pensar frações não como partes de um todo, mas como uma comparação multiplicativa entre duas grandezas comensuráveis. Estudos envolvendo especialmente essa perspectiva são bem-vindos para auxiliar na desafiadora tarefa de ensinar e aprender frações.

Agradecimentos

Este trabalho é fruto de uma licença capacitação do primeiro autor desse texto junto à Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), desenvolvido em parceria com o Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), na pessoa da segunda autora, em um projeto mais amplo e com apoio financeiro da Fapes, e da parceria com o terceiro autor, professor e pesquisador da Rutgers University – Newark, US.

Referências

BALL, D. L. The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. **The Elementary School Journal**, Chicago, v. 90, n. 4, p. 449-466, 1990. http://dx.doi.org/10.1086/461626

BATURO, A. R.; COOPER, T. J. Fractions, reunitisation and the number-line representation. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23., 1999. Haifa. **Proceedings…** Haifa: PME, 1999. p. 81-88. Disponível em: http://eprints.qut.edu.au/31384/1/c31384.pdf. Acesso em: 28 fev. 2023.

BEHR, M. *et al*. Rational Number Concepts. *In:* LESH, R.; LANDAU, M. (eds.), *Acquisition of* **Mathematics Concepts and Processes.** New York: Academic Press, 1983. p. 91-125.

BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre fracionário. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BOOTH, J. L.; NEWTON, K. J. Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? **Contemporary Educational Psychology,** Pennsylvania, v. 37, n. 4, p. 247-253, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001. Acesso em: 25 fev. 2023.

CARRAHER, D. W. Lines of thought: a ratio and operator model of rational number. **Educational Studies in Mathematics**, Berlim, v. 25, n. 4, p. 281-305, 1993. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF01273903. Acesso em: 25 fev. 2023.

CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PINTAZI, D. Revisiting a theoretical model on fractions: implications for teaching and research. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 29., 2005, Melbourne. **Proceedings…** Melbourne: PME, 2005. p. 233-240. Disponível em: https://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2CharalambousEtAl.pdf. Acesso em: 25 fev. 2023.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

DOĞAN, A.; TERTEMIZ, N. I. Fraction models used by primary school teachers. **İlköğretim Online,** Ankara, v.19, n. 4, p. 1888-1901, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.17051/ilkonline.2020.762538. Acesso em: 26 fev. 2023.

GABRIEL, F. *et al*. A Componential View of Children's Difficulties in Learning Fractions. **Frontiers in Psychology**, Lausanne, v. 4, p. 1-12, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715. Acesso em: 01 mar. 2023.

HILTON, P. Do we still need fractions in the elementary curriculum? *In:* INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4., 1983, Boston. **Proceedings…** Boston: Birkhäuser, 1983. p. 37-41. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4684-8223-2. Acesso em: 04 mar. 2023.

KALLAI, A. Y.,; TZELGOV, J. A generalized fraction: An entity smaller than one on the mental number line. **Journal of Experimental Psychology:** Human Perception and Performance, Washington, v. 35, n. 6, p. 1845-1864, 2009. Disponível em: https://doi.org/10.1037/a0016892. Acesso em: 01 mar. 2023.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational number. *In:* LESH, R. (org.). **Number and measurement**: Papers from a research workshop. Columbus: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1976. p. 101-144.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. *In:* KIEREN, T. E. (ed.) **Recent Research on Number Learning.** Columbus: Eric/Smeac, 1980. p. 125-150.

KUSAKA, S. Analysis of learning difficulties with fractions in three African countries: focusing on the scope, sequence and models of fractions. **African Journal of Education and Practice**, Johannesburg, v. 7, n. 5, p. 77-91, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.47604/ajep.1267. Acesso em: 19 mar. 2023.

LAMON, S. J. Presenting and representing: From fractions to rational numbers. *In:* CUOCO, A.; CURCIO, F. (eds.) **The Roles of Representations in School Mathematics -** 2001 Yearbook. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2001. p. 146-168.

LEE, M. Y.; LEE, J.-E. Pre-service teachers' perceptions of the use of representations and suggestions for students' incorrect use. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,** Sydney, v. 15, n. 9, p. 1-21, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.29333/ejmste/103055. Acesso em: 22 fev. 2023.

LIN, C.-Y. *et al*. Preservice Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge of Fraction Operations: A Comparative Study of the United States and Taiwan. **School Science and Mathematics**, Hoboken, v. 113, n. 1, p. 41-51, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00173.x. Acesso em: 24 fev. 2023.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p.1-22, 2008.

LORTIE-FORGUES, H.; TIAN, J.; SIEGLER, R. S. Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? **Developmental Review**, Fribourg, v. 38, [s.n.], p. 201-221, 2015. Disponível em: https://doi.org/doi:10.1016/j.dr.2015.07.008. Acesso em: 23 fev. 2023..

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, 23-40, 2008.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

NAMKUNG, J.; FUCHS, L. Remediating difficulty with fractions for students with mathematics learning difficulties. **Learning Disabilities**: A Multidisciplinary Journal, Champaign, IL, v. 24, n. 2, p. 36-48, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.18666/LDMJ-2019-V24-I2-9902. Acesso em: 18 mar. 2023.

NEWTON, K. J. An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. **American Educational Research Association**, Washington, v. 45, n. 4, p. 1080-1110, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.3102/0002831208320851. Acesso em: 28 fev. 2023.

NI, Y. Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. **Contemporary Educational Psychology**, Amsterdam, v. 26, p. 400-417, 2001. Disponível em: https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1072. Acesso em: 05 mar. 2023.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 79-112, 2008.

POWELL, A. B. Melhorando a epistemologia de números fracionários: uma ontologia baseada na história e neurociência. **Rematec**, Belém, v. 13, n. 29, p. 78-93, 2018.

POWELL, A. B. Como uma fração recebe seu nome? **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 3, n. 3, p. 700-713, 2019.

POWELL, A. B. Enhancing students' fraction magnitude knowledge: A study with students in early elementary education. **The Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 70. [s.n.], p. 01-14, 2023a. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101042. Acesso em: 15 fev. 2023.

POWELL, A. B. Two perspectives of fraction knowledge: characterization, origins, and implications. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracaju, v. 13, [s.n.], p. 76-92, 2023b.

POWELL, A. B. *et al*. 'One of three parts, but they are unequal': Elementary school teachers' understanding of unit fractions. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, [s.v.], n. 80, p. 231-248, 2022.

POWELL, S. R.; NELSON, G. University students' misconception about rational numbers: implications for developmental mathematics and instruction of younger students. **Psychology in the Schools**, Munice, v. 58, n. 2, p. 307-331, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.1002/pits.22448. Acesso em: 17 fev. 2023.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHEFFER, N. F., POWELL, A. B. Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). **Revemop***,* Ouro Preto, v. 1, n. 3, p. 476-503, 2019.

SIEGLER, R. S. *et al*. Early predictors of high school mathematics achievement. **Psychological Science**, Thousand Oaks, v. 23, n. 7, p. 691-697, 2012.

SIEGLER, R. S.; LORTIE-FORGUES, H. Conceptual knowledge of fraction arithmetic. **Journal of Educational Psychology**, Washington, v. 107, n. 3, p. 909-918, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1037/edu0000025. Acesso em: 12 mar. 2023.

SIEGLER, R. S.; PYKE, A. A. Developmental and individual differences in understanding of fractions. **Developmental Psychology**, Washington, v. 49, [s.n.], p. 1994-2004, 2013. Disponível em: https://doi.org/10.1037/a0031200. Acesso em: 09 mar. 2023.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. As operações com números racionais e seus significados a partir

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

da concepção parte-todo. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 55-78, 2008.

SINGH, P. *et al*. Obstacles faced by students in making sense of fractions. **The European Journal of Social and Behavioural Sciences**, London, v. 30, n. 1, p. 34-51, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.15405/ejsbs.287. Acesso em: 07 mar. 2023.

SOUZA, M. A. V. F. de. Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, [s.v.], n. 79, p. 86-100, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/594/594. Acesso em: 22 fev. 2023.

SOUZA, M. A. V. F de; POWELL, A. B. How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 4, p. 77-111, 2021. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6413/pdf. Acesso em: 25 fev. 2023.

TIAN, J.; SIEGLER, R. S. Which type of rational numbers should students learn first? **Educational Psychology Review**, Berlin, v. 30, n. 2, p. 351-372, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3. Acesso em: 11 dez 2022.

TIROSH, D. Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 31, n.1, p. 5-25, 2000. Disponível em: https://doi.org/10.2307/749817. Acesso em: 05 mar. 2023.

TIROSH, D. *et al*. **Prospective elementary teachers’ conceptions of rational numbers**. 1998. Disponível em: http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html. Acesso em: 28 fev. 2023.

TOLEDO, R. V. F. **O conhecimento de professores de Matemática sobre Frações**: uma análise sob a lente da cognição. 2020. 177 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2020.

TORBEYNS, J. *et al*. Bridging the gap: fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. **Learning and Instruction**, Amsterdam, v. 37, [s.n.], p. 5-13, 2015.

TZUR, R. An integrated study of children’s construction of improper fractions and the teacher’s role in promoting that learning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 4, p. 390-416, 1999. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/749707. Acesso em: 12 mar. 2023.

VAN HOOF, J. *et al*. Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. **Learning and Individual Differences**, Amsterdam, v. 61, [s.n.], p. 99-108, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010. Acesso em: 05 mar. 2023.

VINUTO, J. A amostragem em bola de neve na pesquisa qualitativa: um debate em aberto. **Temáticas**, Campinas, v. 22, n. 44, p. 203-220, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.20396/tematicas.v22i44.10977. Acesso em: 10 fev. 2023.

WIDODO, S; IKHWANUDIN, T. Analyzing students’ errors on fractions in the number line. **Journal of Physics**: Conference Series, Bristol, v. 1013, n. 1, p. 1-8, 2018. Disponível em: https://doi.org/doi:10.1088/1742-6596/1013/1/012129. Acesso em: 28 fev. 2023.

WOHLIN, C. Guidelines for snowballing in systematic literature studies and a replication in software engineering. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EVALUATION AND ASSESSMENT IN SOFTWARE ENGINEERING, 14., 2014, London. **Proceedings…** New York: Association for Computing Machinery, 2014, p. 321-330. Disponível em: https://doi.org/10.1145/2601248.2601268.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a230100

Acesso em: 12 fev. 2023.

WU, H. What's sophisticated about elementary mathematics? **American Educator,** Washington, v. 33, n. 3, p. 4-14, 2009.

XIAOFEN ZHANG, M. A.; CLEMENTS, K.; ELLERTON, N. F. Engaging Students with Multiple Models of Fractions. **Teaching Children Mathematics**, Reston, v. 22, n. 3, p.138-147, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.3.0138. Acesso em: 23 fev. 2023.

YUSOF, J.; LUSIN, S. The role of manipulatives in enhancing pupils' understanding on fraction concepts. **International Journal for Infonomics (IJI**), London, v. 6, n. 3/4, p. 750-755, sept./dec. 2013. Disponível em: https://doi.org/DOI:10.20533/IJI.1742.4712.2013.0087. Acesso em: 07 fev. 2023.

Submetido em 18 de Maio de 2023.
Aprovado em 25 de Agosto de 2023.